основными считает первые две интерпретации; объяснение c) он при этом явно упустил.

e) Случайность и необходимость. Напомним (§1.2.4), что Пуанкаре сформулировал весьма удачную мысль о совместном действии случайности и необходимости. Он, к сожалению, не упомянул о проявлении необходимости в массовых случайных явлениях.

В творчестве Пуанкаре теория вероятностей оставалась второстепенным объектом и почти полное отсутствие у него ссылок на своих предшественников кроме **Бертрана** указывает, что он не был должным образом знаком с их работами. Мало того: в 1912 г. Пуанкаре мог бы уже воспользоваться аппаратом цепей **Маркова**. Но вместе с тем он оказался автором руководства, которое примерно 20 лет оставалось основным сочинением по теории вероятностей в Европе и заявление Ле Кама (Le Cam 1986, с. 81) о том, что ни Бертран, ни Пуанкаре "видимо, не владели исчислением вероятностей", некорректно: ему следовало тогда добавить, что в то время вообще никто, кроме, пожалуй, Маркова, не владел теорией вероятностей. О Бертране см. конец §11.1.

Примечания

1. На титульном листе перевод назван авторизованным, однако сам Бертран (*C.r. Acad. Sci.* Paris, т. 40, 1855, с. 1190) указал, что **Гаусс** успел лишь прислать "некоторые частные соображения".

2. Пуанкаре неизменно пользовался термином "исчисление (а не теория) вероятностей" и стóит заметить, что в 1882 – 1891 гг. **Марков** опубликовал пять литографированных курсов своих лекций, названных *Теория вероятностей*, а вот свое руководство (1900a и последующие издания) он назвал *Исчислением вероятностей*. По крайней мере в 1892 г. Пуанкаре не был готов поверить в статистический характер второго закона термодинамики; в дополнение к сказанному в пункте 2 см. Шейнин (1991a, с. 141).

3. В этом же контексте Пуанкаре (с. 171) заявил, со слов Липпмана (Lippmann, автор руководства по термодинамике), что все верят в универсальность нормального закона; экспериментаторы полагают, что это математический факт, а математики считают его экспериментальным.

Литература

Шейнин (1991a; 1994c)

12. Геометрическая вероятность

О развитии понятия геометрической вероятности в XVIIIв. и раньше см. §6.1.6, о его определении, которое предложил **Курно**, см. §10.3-4, а задачу **Бертрана** о длине случайной хорды мы описали в §11.1-1. Здесь мы рассcмотрим дальнейшую историю указанного понятия.

1) **Курно** (1843, §74) применил геометрическую вероятность для вывода распределения функции нескольких случайных переменных. Вот один из его примеров. Дана функция $u = |x - y|$, аргументы которой равномерно распределены на отрезке [0; 1]. Подсчитав площади соответствующих фигур, он заключил, что

$$P(u \geq a) = (1 - a^2),\ 0 \leq a \leq 1.$$

Вероятность противоположного события привела бы Курно к некогда популярной задаче о встрече (**Laurent** 1873, с. 67 – 69): двое договорились встретиться в определенном месте в течение некоторого промежутка времени, но приходят они независимо друг от друга в "случайные" моменты времени, притом первый пришедший какое-то время ожидает второго, затем уходит. Какова вероятность встречи?

2) Геометрическую вероятность фактически применили величайшие естествоиспытателя XIXв. **Больцман** (Boltzmann 1868, с. 50) определил вероятность скорости молекулы находиться в интервале [c; $c + dc$] как отношение времени, в течение которого это имело место, ко всему периоду наблюдения (§10.9.5); мы не останавливаемся ни на прежнем определении вероятности в физике, ни на соображениях, относящихся к эргодической гипотезе. **Максвелл** (1860) применил геометрические вероятности при выводе своего распределения.

Изучая дождевых червей, **Дарвин** (1881, с. 52 – 55) исследовал как они затаскивают бумажные треугольнички в свои норки. Он исходил из того, что "случайный" захват какой-либо стороны треугольничка червем пропорционален ее длине [1].

3) Seneta и др. (2001) описали исследования **Сильвестра**, **Крофтона** и **Барбье** по геометрической вероятности, которые привели к появлению интегральной геометрии. Мы упомянем лишь замечательную задачу Сильвестра: определить вероятность того, что четыре точки, случайно выбранные внутри выпуклой области, образуют выпуклый четырехугольник.

4) **Пуанкаре** (1896, с. 97; 1912, с. 122) заметил, что вероятность точке ($x; y$) находиться внутри некоторой фигуры равна интегралу по соответствующей области

$$\iint \varphi(x; y)dxdy,$$

в котором подынтегральная функция должна еще быть выбрана для данной задачи. Он далее перешел к задаче **Бертрана**, упомянув, правда, лишь ее первые два решения, а затем привел и свои собственные рассуждения, молчаливо допустив, что $\varphi \equiv 1$.

Проведем полярную ось через центр круга, обозначим один из концов хорды A, а ее центр P. Хорда теперь может быть зафиксирована либо полярными углами точек A и P, ω и α, либо полярными координатами точки P, θ и ρ, и двойные интегралы по кругу

$$\iint d\omega d\alpha \text{ и } \iint d\rho d\theta$$

не равны друг другу, что и объясняет, как указал Пуанкаре, парадоксальный характер задачи. Он также изучал вероятность вращающимся фигурам удовлетворять некоторым условиям, но не связал этого исследования с задачей **Бертрана**, ср. пункт 7 ниже.

5) **Чубер** (1903, с. 107 – 108) нашел три новых естественных решений задачи Бертрана:

а) Один конец хорды зафиксирован и она проходит через случайную точку круга; $p = 1/3 + \sqrt{3}/2\pi \approx 0.609$.

b) Оба конца хорды случайны; этот случай совпадает с первым решением Бертрана.

c) Случайно выбраны две произвольные точки хорды; $p = 1/3 + 3\sqrt{3}/2\pi \approx 0.746$.

6) Оказалось (De Montessus 1903), что задача Бертрана имеет несчетное количество естественных ответов. Проведем ось абсцисс $0x$, наметим на ней, на ее положительном направлении, точки D и C, – пересечения концентрических окружностей с центром в O и радиусами $OC = 1$ и $OD = 1/2$ с осью. Произвольные точки $M_2(x)$ и $M_3(x)$ расположены на этой же оси, соответственно между двумя кругами и вне бóльшего из них; через них проведены касательные A_2B_2 и A_3B_3 к меньшей окружности и касательная M_3T к бóльшей окружности с точкой касания T. Наконец, произвольная точка $M_1(x)$ расположена внутри меньшего круга, также на оси абсцисс.

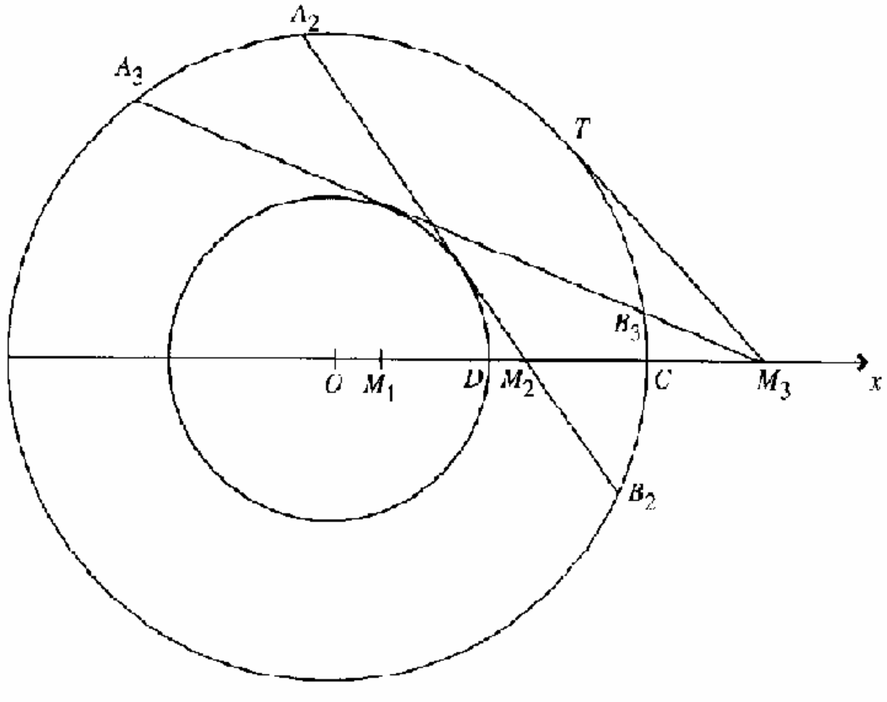

Рис. 1. De Montessus (1903). Точка движется вдоль оси от D к бесконечности и, соответственно, искомая вероятность в задаче Бертрана принимает бесконечное число значений. $OD = 1/2$, $OC = 1$.

Для точек M_2 и M_3 искомая вероятность равна, при $1/2 \leq x \leq 1$ и $x \geq 1$, соответственно

$$P_2 = [\text{угол } A_2 M_2 O/\pi] = [2\arcsin(1/2x)/\pi],$$
$$P_3 = [\text{угол } A_3 M_3 O \div \text{угол } TM_3O] = [\arcsin(1/2x) \div \text{arc sin}(1/x)].$$

При движении от точки O, например, в положительном направлении вероятность P_2 убывает от 1 в точке D до 1/3, а от точки C до бесконечности вероятность P_3 возрастает от 1/3 до 1/2. Трудно доказать (и Монтесу этого не сделал), что P_3 возрастает монотонно, но уже для $x = 1.01$ и 1.1 эта вероятность равна соответственно 0.36 и 0.41 и достигает значения $(1/2 - 1/1600)$ при $x = 10$.

Заметим, что при совпадении точки M_2 или M_3 с D мы имеем первое решение **Бертрана**, а случай $M_3 \to \infty$ приводит к его второму решению. Третий случай Бертрана отличен, поскольку рассматривается не прямая, а точка. Монтесу далее вычислил общую среднюю вероятность исследуемого события, однако, во-первых, напрасно включил в это среднее точки M_1, для которых условие Бертрана выполнялось детерминированно; во-вторых, он допустил при этом грубейшую арифметическую ошибку (при сложении дробей сложил их числители и разделил сумму на сумму знаменателей).

7) **Шмидт** (1926) исходил из соображений **Пуанкаре** и дополнительно указал, что искомая вероятность должна быть инвариантна относительно параллельного переноса и вращения системы координат (в настоящее время добавляется инвариантность относительно отражения). Соответственно, он доказал, что это условие соблюдается только для системы координат (ρ; θ), см. пункт 4, и при переходе от этой системы к другой, но, конечно же, с учетом соответствующего **якобиана** [2].

С современной точки зрения о геометрической вероятности см. **M.G. Kendall** & **Moran** (1963), которые, в частности, замечают, – впрочем, вслед за авторами XIXв., см., например, **Crofton** (1869, с. 188), – что она может значительно упростить вычисление интегралов, а также Амбарцумян (1999). Последний автор указывает на связь задач на геометрические вероятности и интегральной геометрии со стохастической геометрией.

Примечания

1. Поскольку **Дарвин** рассматривал несколько возможных вариантов "случайного", то в этом смысле его исследование опередило задачу **Бертрана** о длине случайной хорды. Дарвин хотел выяснить, осмысленны ли действия червей и заключил, что они захватывали треугольнички не как попало.

2. По мнению **Прохорова** (1999а) с геометрической точки зрения полярная система координат при независимых и равномерно распределенных θ и ρ, $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le \rho \le 1$, является самой естественной.

Литература

Шейнин (2003d)

13. П.Л. Чебышев

13.1. Отдельные сочинения

1) Магистерская диссертация (1845). Она послужила пособием для студентов Демидовского лицея в Ярославле и в ней Чебышев излагал теорию вероятностей почти без привлечения математического анализа, заменяя, например, интегрирование суммированием и уже (как и в своих дальнейших работах) оценивая погрешности допредельных соотношений. Кроме того, диссертация, видимо, содержала добавление, опубликованное лишь через год, см. пункт 2.

2) ЗБЧ Пуассона (1846). Подробное изложение этой работы см. **Прохоров** (1986). Чебышев решал следующую задачу. Проведено n [независимых] испытаний, вероятности "удач" в которых равны p_1, p_2, ..., p_n и требуется оценить вероятность общего числа удач μ в них. Остроумные рассуждения Чебышева привели его к формуле